Op 14 maart (pi-dag!) vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) plaats, waaraan 941 leerlingen meededen op een universiteit bij hen in de buurt. De eerste opgave die middag was een telprobleem. Een opgave waar je pas wat mee kon zodra je een keuze had gemaakt volgens welke systematiek je ging tellen. Welke keuze dat nou precies was, maakte helemaal niet uit. Áls je maar een keuze maakte!

■ door Quintijn Puite

RODE EN BLAUWE KNIKKERS

Opgave 1 (NWO, tweede ronde 2014).
Brenda vult knikkerzakjes vanuit een onuitputtelijke voorraad rode en blauwe knikkers. In elk zakje stopt ze meer rode dan blauwe knikkers en in elk zakje komen niet meer dan 25 knikkers. Zo kan ze bijvoorbeeld een zakje maken met 6 rode en 2 blauwe knikkers of een zakje met 1 rode knikker en 0 blauwe knikkers. Hoeveel verschillend gevulde zakjes kan ze in totaal maken?

In de opgave worden al twee verschillend gevulde zakjes genoemd: één met 6 rode en 2 blauwe knikkers en één met 1 rode knikker en 0 blauwe knikkers. De vraag is hoeveel er in totaal zijn, rekening houdend met de twee eisen die worden genoemd. Om dit goed te kunnen tellen, is het handig om alle mogelijkheden volgens een bepaalde systematiek te ordenen. We kunnen bijvoorbeeld kijken hoeveel zakjes er zijn met in totaal 8 knikkers. Behalve 6 rood en 2 blauw die we al hadden genoemd, is natuurlijk ook nog 7 rood en 1 blauw mogelijk, en zelfs ook 8 rood en 0 blauw. En we kunnen ook nog de andere kant op: 5 rood en 3 blauw, en dan komt... Nee, niet 4 rood en 4 blauw, want dan wordt niet meer voldaan aan de voorwaarde dat er meer rode dan blauwe knikkers moeten zijn in elk zakje. Al met al vinden we 4 verschillende zakjes met 8 knikkers.

NEGEN KNIKKERS Hoe zit dat als we naar zakjes kijken met in totaal 9 knikkers? We zetten de mogelijkheden even op een rij: 9 rood en 0 blauw; 8 rood en 1 blauw; 7 rood en 2 blauw; 6 rood en 3 blauw; 5 rood en 4 blauw. Dat zijn 5 mogelijkhe-

totaal aantal knikkers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
aantal mogelijkheden	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Tabel 1

aantal rode knikkers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
aantal mogelijkheden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tabel 2

aantal blauwe knikkers	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal mogelijkheden	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5

Tabel 3

den. Zou je met 10 knikkers dan op 6 mogelijkheden uitkomen? Nee, dan zijn er nog steeds 5 mogelijkheden, namelijk 10 rood en 0 blauw; 9 rood en 1 blauw; 8 rood en 2 blauw; 7 rood en 3 blauw; 6 rood en 4 blauw. Op deze manier kunnen we alle mogelijke totalen langsgaan, zie tabel 1 onderaan deze pagina.

Nu moeten we de aantallen mogelijkheden nog bij elkaar op tellen. Dat kunnen we stap voor stap doen, maar het kan sneller. We zien namelijk twee maal de getallen 1 tot en met 12 (en daarnaast nog het getal 13). De som van twee maal de getallen 1 tot en met 12 vinden we door deze twee rijtjes handig onder elkaar op te schrijven en vervolgens bij elkaar op te tellen:

1	2	3	...	11	12	
12	11	10	...	2	1	+
13	13	13	...	13	13	

Onder de streep staat twaalf maal 13, dus samen met het losse aantal 13 van hierboven zien we dat het totaal aantal mogelijkheden gelijk is aan $12 \times 13 + 13 = 13 \times 13 = 169$. Daarmee hebben we het probleem opgelost.

TWEE ANDERE SYSTEMATIEKEN We hebben zojuist per totaal aantal knikkers (variërend van 1 tot en met 25) gekeken hoeveel zakjes er zijn met dat aantal knikkers en vervolgens al die deelantwoorden opgeteld. Dit is een voorbeeld van een telsystematiek. Maar er zijn nog meer voor de hand liggende telsystematieken bij deze opgave. Je zou het probleem bijvoorbeeld ook per aantal rode knikkers kunnen bekijken. Hoeveel zakjes met 6 rode knikkers zijn er? Het aantal blauwe knikkers moet dan variëren tussen de 0 en de 5; dat zijn 6 mogelijkheden. En met 13 rode knikkers kan het aantal blauwe knikkers variëren tussen de 0 en 12; dat zijn 13 mogelijkheden. Merk op dat dit maar net goed gaat: met 13 rode en 12 blauwe knikkers zit je al op het maximale aantal knikkers per zakje. Daarom zijn er met 14 rode knikkers wat minder mogelijkheden: nu kan het aantal blauwe knikkers nog maar variëren tussen de 0 en 11; dat zijn 12 mogelijkheden. Al met al vinden we tabel 2.

We zien dat in de rij van het aantal mogelijkheden nog steeds de getallen 1 tot en met 12 twee keer staan, naast nog eens het getal 13. Dat de volgorde anders is, maakt natuurlijk niet uit; net als bij de vorige systematiek vinden we als uitkomst 169.

Kunnen we het dan ook per aantal blauwe knikkers bekijken? Geen probleem. Met 0 blauwe knikkers kan het aantal rode variëren van 1 tot en met 25; met 1 blauwe knikker kan het aantal rode variëren van 2 tot en met 24; dat zijn 23 mogelijkheden. Zo kunnen we doorgaan en vinden we tabel 3.

We moeten nu dus uitrekenen hoeveel $25 + 23 + \cdots + 3 + 1$ is. Dit zijn 13 termen. (Als je dat niet direct ziet, tel dan maar 1 bij elke term op, dan krijg

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
12	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

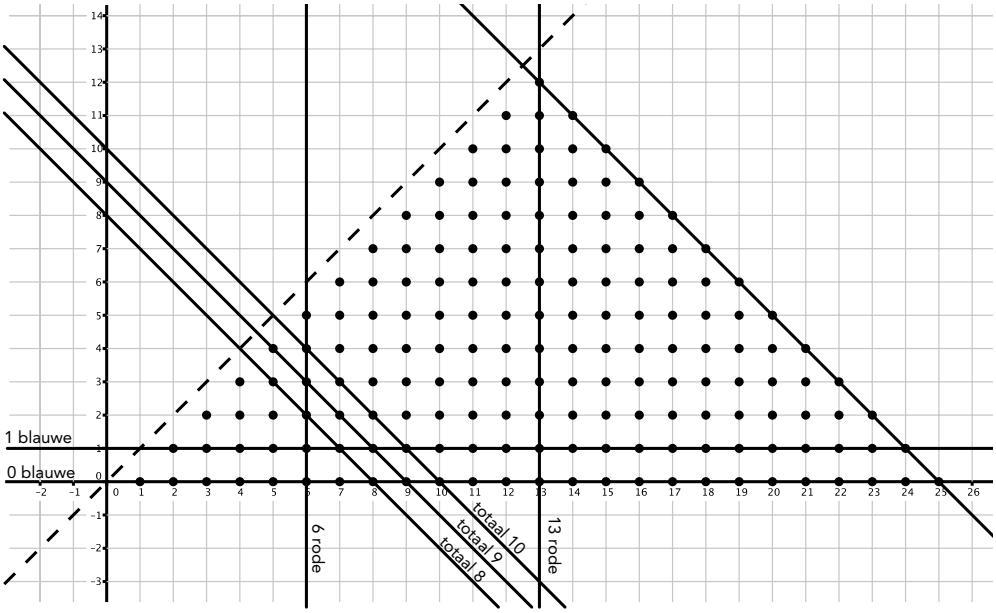
11	12	13	14	...
3	1	–	–	...

je 26 + 24 + ··· + 4 + 2. En deel vervolgens elke term door 2, dan staat er 13 + 12 + ··· + 2 + 1. Dat zijn overduidelijk 13 termen. Een andere manier om in te zien dat dit 13 termen zijn: je springt van 1 naar 25 in sprongen van 2; dat zijn 12 sprongen. En dus moet het om 13 termen gaan, één meer dan het aantal sprongen.) Deze 13 termen hebben een gemiddelde waarde van (25 + 1)/2 = 13. We vinden dan weer als totaal aantal mogelijkheden 13 × 13 = 169.

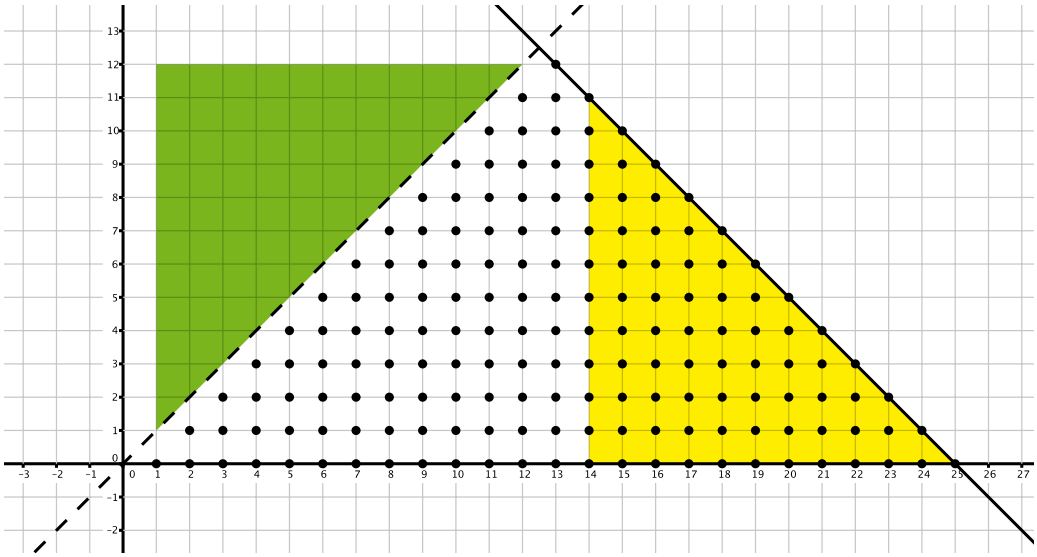
STIPPEN TELLEN We hadden het probleem ook eerst kunnen vertalen naar een stippendiagram. Bij elke combinatie van x rode en y blauwe knikkers kunnen we een stip (x, y) in het xy-vlak tekenen. De eisen stellen nu dat x en y niet-negatieve gehele getallen zijn waarvoor geldt dat $x + y \leq 25$ en $y < x$. We kunnen deze stippen afbakenen door in een rooster de lijnen $x = 0$, $y = 0$, $y = 25 - x$ en $y = x$ te tekenen en goed te bedenken of er nog wel of niet stippen op die lijnen mogen liggen. In figuur 1 zie je het resultaat. De vraag is nu: hoeveel stippen staan hier in totaal?

Je zou de stippen natuurlijk één voor één kunnen gaan tellen. Maar dan ben je wel even bezig, en moet je ook goed bijhouden welke stippen je al hebt gehad. Je kunt ze beter systematisch tellen, bijvoorbeeld per rij. In de onderste rij zie je 25 stippen, in de rij daarboven 23, et cetera. Laat dat nou precies de berekening bij onze derde systematiek opleveren! Ah, maar dat is ook niet zo verwonderlijk; de onderste rij correspondeert immers met $y = 0$ blauwe knikkers, en de volgende met $y = 1$ blauwe knikkers, et cetera. Tellen we juist per verticale kolom, dan volgen we in feite letterlijk de tweede systematiek: met $x = 1$ rode knikker is er 1 stip, met $x = 2$ rode stippen 2, en zo verder tot en met $x = 13$ rode knikkers, waarna vanaf $x = 14$ rode knikkers het aantal stippen per verticale kolom weer afneemt. En ook onze eerste systematiek kunnen we in deze figuur herkennen: de stippen op de schuine lijn $x + y = 8$ (oftewel $y = 8 - x$) corresponderen precies met de vier mogelijkheden die je hebt bij een totaal van 8 knikkers.

Maar nu we het probleem hebben gereduceerd tot stippen tellen, kunnen we nog meer. Bekijk



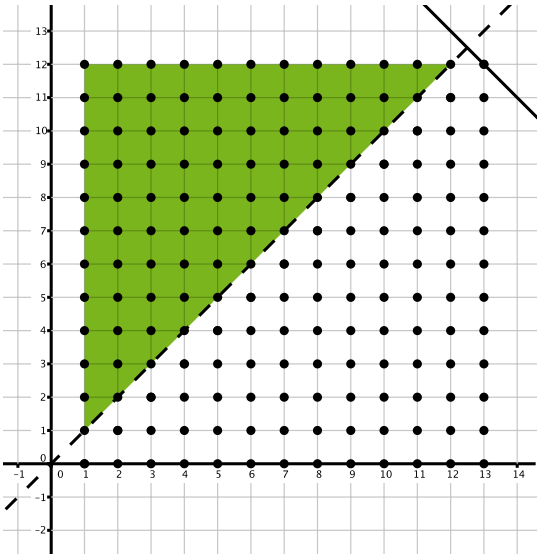
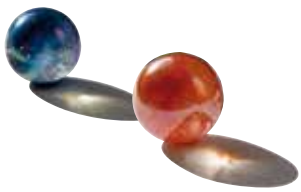
Figuur 1



Figuur 2

maar eens alle punten in de gele driehoek in figuur 2. Die kunnen we net zo goed allemaal in de groene driehoek neerleggen. Je krijgt dan een vierkant van 13 bij 13 stippen, zie figuur 3. Hoeveel stippen hebben we dus in totaal? Inderdaad: $13 \times 13 = 169$. ■

De complete opgavenset van de tweede ronde van de NWO, inclusief uitwerkingen, is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl/wedstrijdarchief/2e-ronde.



Figuur 3